Quelques propos sur le logarithme et le décibel

Michel MAURIN
INRETS - LTE, case 24, 69675 Bron cedex, France
e-mél maurin@inrets.fr

ABSTRACT

It is very trite and classical to use decibels in acoustics, but when one looks in detail this definition may call us for several historical and methodological points, and more may render us puzzled. All of this because decibels are based upon logarithm function in order to define levels from adimensional ratios, and because there are many different ways in order to explain the presence of logarithm. The paper gives a short recall of logarithm properties and investigate the mean reasons, in mathematical and physical fields, in human and environmental sciences also. The conclusion is rather severe about the revelancy of Fechner law in Psychophysics, while very pregnant in decibels and levels definition.

RÉSUMÉ

Le décibel est d'usage courant en acoustique, cependant il s'agit d'une construction mathématique qui peut appeler de nombreux commentaires historiques et méthodologiques, et peut-être aussi quelques sujets d'interrogation. En particulier la définition s'appuie sur le logarithme pour définir les niveaux de grandeurs mais l'on rencontre différentes autres raisons pour expliquer ou justifier cette présence. Après un bref rappel des propriétés essentielles du logarithme le texte aborde les principaux arguments qui sont régulièrement évoqués, du ressort des mathématiques, de la physique et des sciences humaines, sans oublier un point de vue environnementaliste qui renouvelle le regard porté sur le décibel. Les conclusions sont assez sévères quant à la pertinence de loi de Fechner pour expliquer la définition logarithmique des niveaux.

1.0 INTRODUCTION

Le logarithme est une application mathématique qui a émergé durant le XVII^{e} siècle, depuis la publication des tables de John Napier (ou Neper) en 1614 jusqu'à la formule intégrale $\int dx/x$ qui figure dans le mémoire de Calcul différentiel de Gottfried Leibniz en 1684. Pour sa part, le décibel est le nom d'une unité très particulière en physique car elle s'applique à des grandeurs sans dimension, et c'est avant tout un label chargé d'identifier un «procédé de fabrication», ou encore *"une manière de compter"* comme dit Liénard (1978), qui a sans doute vu le jour dans les années vingt du XX^{e} siècle.

Les acousticiens savent bien que le logarithme entre dans la formule de définition du décibel, mais il possède tant de facettes étonnantes et diverses que l'on peut se méprendre sur celle qui en est à l'origine. On rencontre en effet des explications de différentes natures dans la littérature acoustique, certaines paraissant bonnes et d'autres étant davantage du ressort d'une confusion.

Nous essayons ici de suivre le fil qui a conduit du logarithme au décibel. Il se compose d'une première partie à connotation mathématique et physique, puis d'un développement plus orienté vers les Sciences Humaines, lui-même en plusieurs étapes. Mais tout ceci n'est-il pas à l'image de l'Acoustique dont l'objet principal est l'étude des sons physiques qui sont perçus par l'oreille de l'Homme ? Le développement est illustré par un certain nombre de citations, elles sont signalées en *italique*.

2.0 LE LOGARITHME

A cause de ses propriétés plusieurs disciplines scientifiques, dont l'acoustique, utilisent souvent le logarithme. Nous notons ln le logarithme népérien, log le logarithme décimal et $\log_a$ le logarithme en base a, (a nombre réel positif), et nous considérons ci-dessous que les arguments x, y ... sont uniquement des nombres réels positifs, de sorte que chaque transformée ln x soit encore un nombre réel (mais positif ou négatif).

2.1 Les propriétés

La propriété la plus connue des logarithmes est la formule

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad (1)$$

x et y nombres réels positifs, et puisqu'ils se déduisent les uns des autres par un coefficient multiplicatif de la forme générale $\log_a x = \ln x / \ln a$, (le coefficient $\mu = 1/\ln a$), ils vérifient tous cette propriété. L'interprétation est immédiate et très importante, la relation (1) signifie que si x et y sont deux grandeurs multiplicatives leur deux images ou transformées par un logarithme sont des quantités additives dont la somme est égale à la transformée du produit.

Les autres propriétés du logarithme sont étudiées dans les livres d'Analyse, et nous nous limitons ici à souligner qu'elles constituent une palette étonnante de propriétés qui sont nécessairement attachées au logarithme ; comme le dit

Penrose dans un contexte analogue "*(les propriétés) sont déjà là !*" (Penrose 1993). Citons pour mémoire la monotonie croissante, la concavité, et bien entendu la formule de Leibniz indiquant que le logarihme est la primitive de l'application 1/x. Une autre propriété peut-être un peu moins connue mais importante est due à Cauchy, parmi toutes les applications h qui vérifient la relation,

$$h(xy) = h(x) + h(y) \qquad (1')$$

le logarithme (et tous ses multiples) est la seule à être continue (Falmagne 1985, Roberts 1979, Verley 1990). On sait aussi que le mot "logarithme" est un néologisme dû à Napier qui a associé "logos" et "arithmos" pour tenir un discours sur les nombres (son mémoire de 1614).

2.2 Lois additives et multiplicatives

Si u et v sont deux éléments d'un ensemble E doté d'une loi de composition interne [u,v] à valeur dans E, on appelle loi additive toute application notée "add" de E dans la droite R des réels qui vérifie

$$add([u,v]) = add(u) + add(v) \qquad (2),$$

et loi multiplicative toute application "mult" de E dans la demi-droite R^+ de réels positifs qui vérifie

$$mult([u,v]) = mult(u)\ mult(v) \qquad (3).$$

Le résultat suivant est immédiat, voire trivial, toute application composée $h_o mult$ avec h vérifiant (1') est une loi additive. En effet quand on applique (1') sur (3) on obtient

$$h_o mult([u,v]) = h_o mult(u) + h_o mult(v) \qquad (4),$$

ce qui permet de se ramener au schéma additif (2) à partir d'une loi multiplicative. La relation (4) est la clef d'un grand nombre de transformations de lois multiplicatives en lois additives, c'est évidemment le cas avec un logarithme pour h, la continuité et ses autres propriétés en sus.

3.0 Niveaux de grandeurs et décibels

Il semble qu'au départ les niveaux de grandeur en décibels (en abrégé dB) proviennent d'une situation pratique dans laquelle il s'est révélé utile de comparer diverses grandeurs physiques homogènes sous la forme de leur rapport, c'est à dire à l'occasion de l'introduction convenue d'une forme particulière de loi multiplicative (3). Leur présentation ainsi que celle de leur mode d'introduction commence donc par un discours qui relève de la Physique et des Sciences de l'Ingénieur.

3.1 Un essai de reconstitution historique

Il n'est pas aisé de retrouver dans la littérature l'acte de naissance précis et daté des décibels, mais on rencontre à l'occasion des bribes historiques et méthodologiques telles que "*La notion de décibel, qui doit son origine à l'étude de la transmission des signaux le long d'une ligne téléphonique, s'est révélée extrêmement commode dans la pratique, et son usage s'est répandu dans toutes sortes de domaines, en particulier en acoustique*" (Riéty et Ottié 1986). Ces auteurs poursuivent en disant "*En principe le décibel se rapporte à la comparaison de deux énergies, soit que l'on compare deux états énergétiques différents d'un même système, soit que l'on étudie la transmission d'une certaine quantité d'énergie d'un système à un autre*".

On lit également "*Rappelons simplement qu'il est toujours permis (et même recommandé) d'exprimer une grandeur physique par son rapport à une grandeur semblable prise pour unité, et qu'il est commode si l'étendue de mesure est grande, de prendre le logarithme de ce rapport*" (Liénard 1978), qui poursuit en évoquant à son tour les télégraphistes, tout en ajoutant qu'on peut appliquer ce procédé "*à n'importe quoi*" ; ou encore lorsque c'est appliqué à l'acoustique "*the intensity of one sound can be compared to that of another of the same frequency by taking the ratio of their powers*" (sound intensity entry 1992).

Tout cela signifie qu'il a été jugé pertinent de comparer des énergies deux à deux de manière relative par l'intermédiaire de leur rapport E_2/E_1, ce qui a introduit de la sorte une multiplication, ainsi que la relation multiplicative plus générale $E_3/E_1 = E_3/E_2\ E_2/E_1$. Dans ces conditions il n'est pas surprenant que le logarithme ait été mis en oeuvre, comme nous l'avons rappelé dans la relation (4). Le nombre $\ln E_2/E_1$ est ainsi ce qui a été retenu pour caractériser le passage de l'état 1 à l'état 2 ; il s'agit d'un nombre sans dimension physique mais on lui a malgré tout attribué un nom et une sorte d'unité pour bien identifier ce procédé. Ce nombre s'appelle un niveau, il est noté L (pour level, parfois N pour niveau chez des auteurs francophones, Didier 1993, Habault 1994, Migneron 1980, Riéty et Ottié 1986), et on l'exprime en "bels" quand on prend le logarithme décimal, ou en décibels avec la relation de définition $L = 10 \log E_2/E_1$; le nom de l'unité étant choisie "*in honour of the US inventor Alexandre Graham Bell*" (sound intensity entry 1992). D'après des conversations informelles diverses, le décibel aurait été créé dans les années vingt dans les murs des Bell Laboratories.

Bien entendu le logarithme et l'additivité résultante vont de pair, "*Le succès de l'utilisation des décibels est dû à la propriété suivante : si l'on met bout à bout plusieurs lignes, la perte totale, exprimée en décibels, est égale à la somme des pertes correspondant aux différentes lignes ; de même, le gain total d'un amplificateur, exprimé en décibels, est égal à* *la somme des gains partiels de chaque étage. Cette propriété découle des propriétés générales des logarithmes*" écrivent Riéty et Ottié en 1986. On doit pouvoir ajouter que dans cette citation il serait sans doute plus exact de remplacer "décibel" par "niveau", et penser aussi qu'il paraît plus pertinent d'inverser le sens des implications causales, en disant plutôt que c'est parce que l'on a pris l'habitude de faire des comparaisons d'énergie avec des rapports (en substance une relation multiplicative) que l'on a très certainement éprouvé la nécessité d'un homomorphisme de H (implicitement continu). Dans ces conditions il n'y a pas lieu de s'étonner de la propriété de l'additivité des niveaux en décibels. Dans le même temps ce succès révèle l'attente explicite ou latente qui est manifestée vis-à-vis de lois additives.

Cette imbrication entre rapport de grandeurs et additivité associée est tout autant manifeste dans les présentations complémentaires suivantes "*Dès que les ingénieurs conçurent des systèmes électro-acoustiques ils jugèrent plus pratiques d'utiliser, pour exprimer la grandeur d'une pression et d'une intensité acoustique, des valeurs logarithmiques plutôt que des grandeurs physiques. ... C'est ainsi qu'ils créèrent des niveaux*" (Josse 1973), "*Le décibel étant d'un usage commode en raison de ses propriétés logarithmiques, on est tenté de l'utiliser par extension pour exprimer n'importe quel rapport entre deux quantités de la même espèce*" (Riéty et Ottié 1986), "*accordingly the relative intensity of two sounds in bels is equal to the logarithm of the intensity ratio*" (sound intensity entry 1992), ou encore "*We note ... that the sound-power level for the product of two ratios is equal to the sum of the levels for the two ratios*" (Beranek 1971).

3.2 Des grandeurs de référence

A la suite de ces diverses justifications, il est patent que le logarithme a été introduit pour définir ce que l'on nomme des niveaux. Et l'on peut ajouter un complément immédiat qui résulte du caractère bijectif du logarithme. En effet si l'on pose $L = \ln E_2/E_1$ on est tenté d'écrire $L = \ln E_2 - \ln E_1$. Malgré les apparences l'homogénéité dimensionnelle de cette relation est respectée puisque le logarithme est de dimension unité quelle que soit la dimension de son argument (Maurin 1999 Annexe 2), cependant les niveaux disparaissent de la formule. Peut-être est-ce pour cela que l'on a complété avec une grandeur de référence E_0 constante qui permet d'écrire le rapport E_2/E_1 sous la forme d'un produit $E_2/E_0 \; E_0/E_1$, de telle sorte que le niveau $L = \ln E_2/E_1$ devient une différence de niveaux $\ln E_2/E_0 - \ln E_1/E_0$; nous rappelons à ce propos que le rapport à une grandeur de référence est l'option de départ chez Liénard (1978).

Après un choix conventionnel de E_0 il en résulte une bijection entre les grandeurs proprement dites E_i et leur niveau $\ln E_i/E_0$, ce qui permet ainsi parler du niveau d'une grandeur à la place de la grandeur elle-même. Cela suppose simplement que la grandeur de référence, la base du logarithme et la constante multiplicative éventuelle dans m ln soient fixées de manière conventionnelle, consensuelle et cohérente.

3.3 D'autres justifications

Tout compte fait la création des niveaux et des décibels est une opération «qui se passe bien» compte tenu des ingrédients initiaux qui sont rappelons-le une relation multiplicative dictée par les pratiques de comparaison relative et l'attente d'une relation additive. Et l'on doit pouvoir ajouter que les bonnes raisons ainsi introduites pourraient être en partie masquées, ou mal identifiées, et de ce fait assez mal mises en avant, à cause de la simplicité quasi-triviale de l'opération.

<u>Les justifications classiques</u> - Mais il arrive aussi que les acousticiens évoquent assez fréquemment d'autres justifications ou explications qui viennent en partie jeter la confusion de manière plus ou moins malencontreuse ; on rencontre à ce sujet l'un ou l'autre de deux arguments suivants:

i) Le premier concerne la réduction de l'étendue numérique entre les grandeurs E_i/E_0 étudiées, "*it is convenient in acoustics to express sound intensity in logarithmic units because the wide range of pressures to which the ear is sensitive*" (Kryter 1987), ou "*The range of sound pressure ... is so wide it is convenient to employ sound pressure level, ..., this is because a logarithmic scale compresses the range ...*" (Harris 1979).

Ceci est tout à fait exact, cela constitue un facteur non négligeable de commodité, Fleury et Mathieu (1955) soulignent qu'en acoustique les grandeurs proprement dites varient dans le rapport de 1 à 10^{14}. Cependant il faut ici se rappeler que la réduction de l'étendue est une propriété technique attachée au logarithme (la monotonie et la concavité), et qu'elle peut tout à fait ne pas être la raison principale de la définition des niveaux. Il suffit pour s'en convaincre de constater que dans d'autres disciplines qui pourtant travaillent avec des champs de grandeurs numériques très étendus comme les distances en Astronomie ou les durées en Géologie ou Paléontologie, il n'est cependant guère habituel de parler de niveaux de longueurs ou de niveaux de temps. On peut sans trop de risque d'erreur conjecturer que cela est dû au fait que dans ces disciplines il n'y a pas de relation multiplicative qui se soit naturellement introduite.

À l'inverse l'idée de la réduction de l'étendue se rencontre en Chimie de l'acidité et des solutions ioniques et aqueuses diluées. La concentration $[H^+]$ des ions de l'hydrogène varie de 1 à 10^{-14} et on y a dès 1909 défini le pH = - 10 $\log[H^+]$ qui varie de 0 à 14. Cependant il y a aussi en Chimie la loi d'action de masse qui se traduit par les relations multiplicatives $[H^+]$ $[OH^-] = K_e \approx 10^{-14}$ pour l'eau, $[H^+]$ $[OH^-] = K_a$ pour les acides et $[B^+]$ $[OH^-] = K_b$ pour les bases (Gallais et Rumeau 1961). Ceci fait que l'on retrouve les deux arguments de réduction de l'étendue et des relations multiplicatives comme en Acoustique ; il y a malgré tout quelques différences, les concentrations ioniques sont d'emblée des nombres sans dimension qui n'ont pas besoin d'être réduits par une grandeur de référence, et sur le plan du vocabulaire on ne parle pas de «niveau de concentration».

ii) Le second argument est en provenance des Sciences Humaines avec ses "lois" des sensations ; par exemple *"(sound level in decibel) is a logarithmic scale well suited to human hearing which is logarithmic rather than linear in its behaviour"* (Ford 1987), ou bien "*il semble qu'autour de 1000 Hz la sensibilité de l'oreille suive la loi logarithmique*" (Liénard 1978).

Plus précisément il s'agit de la fameuse loi de Fechner qui possède sa logique et son histoire propre, et qui fait la part belle au logarithme. Et puisque l'acoustique est essentiellement la discipline des sons audibles avec un fort enracinement psycho-physiologique, le logarithme qui figure chez Fechner est venu s'immiscer dans les raisons que l'on évoque couramment pour justifier la définition des niveaux. La discussion de cette loi avec ses implications et confusions en acoustique, son caractère inutile et fâcheux, et le rattrapage final qui est intervenu lorsqu'est apparue une autre loi des sensations plus opérationnelle (celle de Stevens) fait l'objet de la section 4.

Il arrive encore à ces deux raisons d'être combinées, comme par exemple dans cette présentation "*En application de la "pseudo-loi" de Weber Fechner ..., le fait qu'il existe un rapport élevé entre les valeurs de la pression acoustique au seuil d'audition et au seuil intolérable ... a conduit tout naturellement à adopter une notation logarithmique*" (Didier 1993), ou encore "*ces rapports élevés, (ainsi que la soi-disant loi de Weber Fechner signalée ci-aprés) ont conduit à utiliser couramment une notation logarithmique*" (Fleury et Mathieu 1955).

Un argument récent - La question peut être abordée autrement en s'interrogeant sur la "meilleure" transformation possible $f(E_i/E_0)$ pour relier un rapport d'énergie à un indice acoustique. En suivant un argument de nature statistique et formelle il s'avère que c'est précisément l'application logarithme qui l'emporte, et vient conforter ainsi sur un plan technique le choix des télégraphistes ; la démonstration s'appuie en substance sur la "galaxie" des propriétés du logarithme (Maurin 1994).

Une autre démarche encore - Pour tenter de terminer cet état des lieux, on peut ajouter que chez certains auteurs les niveaux et les décibels sont simplement définis en une ou deux lignes sans préoccupation de justification (Beranek 1971, Habault 1994, Lefebvre 1994, Migneron 1980).

3.4 Les savarts ou millibels de fréquence

Curieusement il se présente en Acoustique une autre introduction historique, indépendante et antérieure du logarithme, qui concerne la fréquence de chaque son pur et les relations qui se manifestent entre les fréquences et leur perception musicale.

Par définition l'intervalle de deux notes est le rapport de leur fréquence $i = f_2/f_1$ (Fleury et Mathieu 1955, Matras 1990), et une telle définition n'est nullement quelconque puisque "*en Grèce, en Chine, en Egypte, au Moyen-Age ou de nos jours*" (Matras 1990) les sons dont les fréquences sont dans le rapport de 1 à 2 ont été considérés comme des sons particulièrement consonants. Le rapport i = 2 correspond à la définition de l'octave, et l'on sait bien que d'autres valeurs de rapport se rencontrent aussi dans les harmonies consonantes, 3/2 pour la quinte, 4/3 pour la quarte, 5/4 pour la tierce ... (Fleury et Mathieu 1955, Matras 1990) ; Matras ajoute que "*les physiciens ont constaté qu'un intervalle est d'autant plus consonant que le rapport des fréquences composantes est réductible à une fraction plus simple*".

Le rapport des fréquences revient à introduire une relation multiplicative, laquelle peut être à son tour suivie de l'intervention usuelle du logarithme comme en (4) ; Fleury et Mathieu (1955) ne signalent-ils pas que "*il suffit de caractériser un intervalle par son logarithme*", et plus loin "*qu'il est commode de représenter chaque intervalle par son logarithme décimal*". Il en est résulté la définition des savarts pour intervalle de fréquence avec la relation $h_s = 1000 \log f_2/f_1$, ou plus récemment celle du "cent" $h_c = 1200 \log_2 f_2/f_1$ en prenant le logarithme en base 2. De la sorte les savarts sont des "millibels" (pour des rapports de fréquence), un savart vaut pratiquement 4 cents et un décibel 400 cents ; n'est-ce pas là une belle illustration du "*n'importe quoi*" de Liénard (1978), avec l'antériorité du procédé de fabrication en sus.

Mais bien que les fréquences et les énergies s'appliquent à deux aspects tout à fait différent des sons, on peut lire que "*la loi de Weber Fechner étendue à la mesure de la hauteur h d'un ton pur de fréquence f donne la relation $h = 1000 \log f/f_0$ (f_0 fréquence de référence)*" (Matras 1990). Cette fameuse loi se retrouve ainsi, indûment, sur le chemin des décibels de fréquence, et vient en rajouter à la confusion autour de la présence du logarithme ; mais cette fois-ci c'est plus manifeste encore puisque Félix Savart mourut en 1841, soit 20 ans avant que Fechner ne formulât sa loi (section 4). Cela exhibe surtout le défaut de vision nette que l'on peut porter sur la présence de l'application logarithme, ainsi que la trop grande influence que l'on a laissé prendre à la loi de

Fechner avec sans doute une certaine complaisance passive.

4 La loi de Fechner et la Psychophysique

De nombreuses justifications du décibel nous condusient vers la Psychophysique. C'est une discipline qui appartient aux Sciences Humaines et qui s'est chargée notamment d'établir des correspondances (sous-entendu numériques) entre les stimulations physiques et les sensations qui en résultent. Elle s'est notamment appuyée à l'origine sur des observations d'astronomes soucieux des erreurs qu'ils commettaient (Benzécri 1982), et a ensuite été baptisée et fondée par Fechner quand il a énoncé et formalisé sa loi en 1860 (au départ un physicien prolixe, Falmagne 1985). D'une manière générale le stimulus étudié est une grandeur physique x qui prend ses valeurs sur un continuum, et il est convenu de lui faire correspondre une sensation sur un continuum subjectif mais néanmoins numérique, décrit par une autre variable u ; une expression de la forme u(x) est une "loi" qui répond à toutes ces questions.

4.1 La loi de Fechner

La démarche de Fechner - Ce pionnier s'appuie sur la notion de "Jnd" (just noticeable difference, différence juste perceptible en Français). En premier il est supposé que pour tout stimulus de valeur x, un Jnd Δu_F (sur le continuum subjectif de Fechner u_F) correspond au plus petit incrément de stimulus Δx qui permet au sujet de distinguer les sensations respectivement dues à x et à $x + \Delta x$ (un Jnd de grandeur physique). Le raisonnement reprend ensuite un résultat antérieur de Weber en 1831 (Bonnet 1986), qui stipule que les Δx sont proportionnels aux stimulations x, ce qui signifie que le rapport $\Delta x/x$ est constant ; en dernier Fechner ajoute l'hypothèse que les Δu_F sont égaux.

De ces deux relations $\Delta x/x = K$ et $\Delta u_F = C$ il en déduit $\Delta u_F/\Delta x = C/Kx$, puis la version différentielle $du_F/dx = C/Kx$ et la solution immédiate $u_F = C' \ln x + C''$ (d'après la formule de Leibniz). C'est ce qui a longtemps fait dire que la sensation varie comme le logarithme de la stimulation ; ce continuum u_F est communément dit de "confusion-discrimination" en fonction de son mode de construction. On peut signaler que Benzécri (1982) et Bonnet (1986) font remonter l'énoncé de Weber aux astronomes et physiciens Bouguer, Lambert, ... vers 1760, et qu'on l'appelle aussi la loi de Bouguer Weber.

Les suites de cet énoncé - On a souligné que la loi de Fechner a été "*widely defended but not widely applied since his day*" (Luce Edwards 1958). Le fait est que si elle a longtemps été imposée et protégée par l'opiniâtreté de son initiateur elle a fini par être battue en brèche par des approches différentes (Bonnet 1986, Falmagne 1985, Roberts 1979).

Il est intéressant de noter que parmi les oppositions et contestations que la loi de Fechner a rencontrées, il y en a une qui se situe joliment sur le plan formel du logarithme et des mathématiques ; elle a donné lieu à une formulation révisée et à une solution appropriée un siècle plus tard (Luce and Edwards 1958, Annexe 1).

Un premier bilan - Pour conclure sur ce point, la loi de Fechner n'est pas véritablement une loi puisqu'elle repose sur une déclaration invérifiable (l'identité des différents Δu_F). Mais cela ne l'a nullement empêché d'acquérir quelque notoriété auprès de la communauté scientifique et d'un certain public, ce qui a pu banaliser l'idée d'un lien logarithmique entre l'intensité de la stimulation physique et la sensation qui en résulte.

Il faut toutefois garder à l'esprit que le résultat de Weber précède l'intervention de Fechner, qu'aujourd'hui le Jnd Δx est remplacé de manière plus précise par la "fonction de Weber" $\Delta_\pi(x)$ définie en fonction du stimulus et d'un indice de discrimination π compris entre 0 et 1, et que les recherches se poursuivent sur $\Delta_\pi(x)$ et sur la fraction de Weber $\Delta_\pi(x)/x$ pour de nombreuses stimulations physiques (Falmagne 1985). Ceci entraîne donc que l'on commet une confusion quand on ne fait pas la distinction entre les contributions respectives de Weber (et de Bouguer) et de Fechner, et que l'on utilise le résultat de Weber pour justifier la relation logarithmique. Cependant l'habitude a souvent été prise d'appeler la loi de Fechner sous le double nom de loi de Weber Fechner comme on peut le constater dans de nombreuses citations reprises dans ce texte, ce qui confirme à sa manière le rôle surcoté de la loi de Fechner.

Dans le même temps on doit aussi remarquer que le logarithme n'intervient pas ici de manière erronée ou subreptice, mais qu'il figure au titre d'une bonne et simple réponse, que la question s'avère ou non mal formulée ou non pertinente. Et cette fois-ci sa présence n'est pas liée à la transformation d'une loi multiplicative en loi additive en suivant (4), mais à une propriété différentielle non moins classique.

4.2 La loi de Stevens

Un autre procédé de quantification des sensations a été proposé par Stevens à partir de 1935, selon une démarche tout à fait différente. En l'occurence on demande simplement à chaque sujet d'expérience exposé à une stimulation x d'évaluer numériquement la sensation $u_{St}(x)$ qu'il ressent par un nombre proportionnel à la sensation $u_{St}(x_0)$ due à une stimulation de référence x_0 ; ici l'indice $_{St}$ du continuum subjectif u rappelle cette autre procédure. Il suffisait d'y penser, et cela constitue la méthode de "l'estimation de la grandeur" (*magnitude estimation*), qui par simple construction est une méthode directe et qui produit explicitement des réponses numériques sur cet autre continuum subjectif. Stevens et ses collaborateurs ont ainsi remarqué que pour un grand nombre des stimulations physiques dites *prothétiques* le rapport des sensations varie comme une fonction puissance du rapport des excitations, selon la relation générique

$$\frac{u_{St}(x)}{u_{St}(x_0)} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha}$$

Les valeurs des exposants a sont diverses, par exemple 0,3 ≈ log 2 pour la sensation due au bruit de sons purs (bruyance ou sonie), 3,5 pour la sensation ressentie quand on est soumis à une différence de potentiel électrique, ... ; elles sont assez bien établies pour une bonne vingtaine de stimulations différentes (Canévet 1996, Luce and Galanter b 1963, Roberts 1979, Stevens 1966).

Stevens a consolidé son édifice avec les "*cross modality matching*" (évaluations croisées de grandeurs physiques différentes) qui consistent à faire les estimations pour une grandeur en se rapportant aux valeurs d'une autre grandeur et à ne plus passer par l'intermédiaire d'une évaluation numérique (Roberts 1979). Ceci fait que l'on dispose donc ici d'évaluations directes des sensations plus opérationnelles qu'avec le cumul indirect des Jnd, et mieux validées également.

4.3 Un édifice de lois

Les lois de Fechner et de Stevens ont constitué deux grands moments de la Psychophysique, et ont pu paraître en concurrence à l'énoncé de la seconde, "*cette loi (celle de Stevens) est en contradiction avec celle de Weber Fechner*" (Josse 1973) ; et en particulier le graphe de la fonction puissance ressemble un peu à celui de la fonction logarithme lorsque l'exposant de Stevens est inférieur à 1 ! Il n'y a toutefois aucune raison ni de les confondre ni de les opposer, car chacune d'elles à sa manière évoque une procédure d'évaluation des sensations sur un continuum numérique différent (Luce and Galanter a. 1963), voir Figure 1.

En dernier Stevens évoquait la préoccupation "*nomothétique*" en Psychophysique (Stevens 1971), et l'on note que ces deux relations constituent le début d'un réseau de relations psychophysiques plus étendu, comprenant notamment une loi de Galanter et Messick de nature logarithmique entre l'échelle de Stevens et l'échelle de Fechner (Galanter and Messick 1961, Stevens 1966), Figure 1, (le réseau de ces relations figure dans Maurin 1998).

Actuellement la présentation de la Psychophysique se fonde sur la formulation d'un "*Fechner problem*" et sur une modélisation associée de la discrimination entre deux stimuli x_k et x_l , et elle conserve également les notions de fonction et de fraction de Weber (Falmagne 1985). Elle supprime ainsi toute référence aux Jnd et aux constructions qui en résultent,

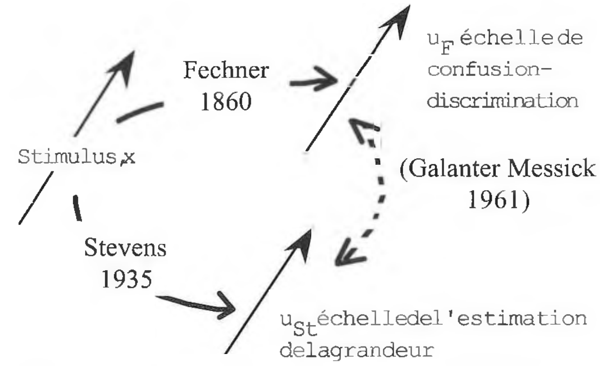


Figure 1 - Les lois de Fechner et de Stevens.

donc à la loi historique de Fechner, ainsi qu'à la révison de Luce et Edwards (en Annexe 1). Cependant il est utile de rappeler les principales étapes qui ont pu influencer les idées, et laisser des traces importantes quand on s'interroge comme ici sur la présence du logarithme dans les niveaux.

4.4 La situation en acoustique, le rattrapage

Cette trace concerne, nous l'avons vu, l'invocation répétée de la loi de Fechner jusque dans l'introduction des savarts ; et par la suite la loi de Stevens a fait aussi son entrée en acoustique.

<u>La sonie</u> - La cohabitation Fechner Stevens s'est opérée à propos de l'évaluation de l'intensité subjective d'un son ou sonie ou encore bruyance. On sait que pour cela on a retenu de manière opératoire l'effet que produit un son pur, puis établi les coubes de mêmes sensations sonores en fonction de la fréquence en prenant comme référence la sensation correspondant à la fréquence de 1000 Hz. Dans un repère «fréquence f - niveaux de bruit en décibels L» il en est résulté le réseau de courbes isosoniques pour sons purs de Fletcher et Munson dans les années trente, repris ensuite par Churcher et King, Robinson et Dadson. Ces courbes ne se croisent pas (réseau iso oblige), et leur repérage numérique dans le diagramme correspond à la définition de la sonie. Il s'avère en fait qu'il y a deux procédés de repérage, et que chacun d'eux est plus ou moins attaché à une loi psychophysique.

i) Le premier procédé correspond à l'évaluation de la sonie en "phones". Par définition le niveau d'isosonie en phones d'une courbe est égal au niveau de pression acoustique L en décibel du point de la courbe pour la fréquence de référence de 1000 Hz. Puisque ce réseau est établi avec des sons dont les niveaux sont compris entre 0 et 140 dB à 1000 Hz (du seuil de perception jusqu'au seuil de douleur), la phonie d'un son pur varie entre 0 et 140, et l'on voit combien cette définition est fondée sur une échelle de niveaux.

La loi de Fechner n'intervient pas directement il est vrai, mais elle figure en filigramme. Ceci est souvent justifié par le fait que la fraction de Weber ΔI/I pour l'intensité des sons purs est relativement constante entre 500 et 4000 Hz (Didier 1993, Fleury et Mathieu 1955), ce qui fait que les courbes d'isosonie restent assez bien parallèles et équidistantes dans cette zone (Liénard 1978 - lequel n'évoque d'ailleurs ni Fechner ni Weber).

Nous avons cependant rappelé l'amalgame facheux que l'on commet quand on tire argument de la validité de la loi de Weber pour justifier celle de Fechner ; et d'une manière plus générale, en acoustique comme pour d'autres stimuli, il a été constaté que la loi de Weber est valide dans les régions non extrêmes des sensations (Bonnet 1986, Luce and Galanter a 1963, Falmagne 1985). Il en résulte qu'il paraît bien erroné de tirer de la pertinence du résultat de Weber un argument en faveur de la définition logarithmique des niveaux.

ii) Le second procédé pour évaluer la sonie se fait avec les "sones", de telle sorte que la sonie d'un son évaluée en sones double lorsque la phonie augmente de 10 décibels, comme l'indique la formule de définition suivante:

sonie (en sones) $= 2^{(\text{niveau d'isosonie en phones - 40})/10}$
c'est à dire
sonie (en sones) $= 2^{L/10}\ 2^{-4}$
qui est de la forme $\mu\,(10^{L/10})^{\log 2}$.

La quantité $10^{L/10}$ correspond à l'énergie acoustique du son à 1000 Hz, et l'on voit apparaître l'exposant a = log 2 ≈ 0,3 sans que l'on ait ici besoin de niveau proprement dit, donc d'un quelconque pseudo recours à Fechner. On remarque aussi que la définition des sones permet simplement de traduire et d'exprimer la loi puissance de Stevens, laquelle compte tenu du grand nombre de vérifications expérimentales montre que la définition des sones est mieux établie.

Autre bilan - Pour résumer, la loi de Fechner est très discutable et pour le moins sans portée pratique, et l'on assiste avec les sones à une sorte de rattrapage qui vient inclure l'essentiel de la loi de Stevens. Les sones montrent comment la définition des phones se révèle superflue, et ce n'est que parce que les décibels sont déjà en place que les sones utilisent les niveaux dans l'expression $2^{L/10}$.

Ainsi, sans être porteurs d'erreur par eux-mêmes, les phones participent au renforcement du climat de complaisance fechnérienne en faveur de "son" logarithme, et de confusion à propos du résultat de Weber. Compte tenu de l'aspect physiologique et humain de l'audition, et faute de vigilance suffisante, on peut imaginer que c'est de cette manière que la loi de Fechner a pu devenir une sorte de cheval de Troie dans l'édifice de l'acoustique, s'en trouver mieux accréditée, et contaminer la genèse électrique et télégraphiste des niveaux par défaut d'attention comme cela semble s'être passé pour les savarts de fréquence.

5 Le décibel en Acoustique Environnementale

Notre sujet concerne la (ou les) bonne(s) raison(s) qui a (ont) prévalu pour la définition logarithmique des niveaux ainsi qu'une perception plus exacte des autres ; mais pour être un peu plus complet on ne peut pas ne pas mentionner quelques uns des aspects auxquels la pratique de l'acoustique peut conduire dans le domaine de l'environnement, ni parmi leurs conséquences une certaine remise en question de l'intérêt des niveaux.

5.1 Des relations additives

En effet quand il s'agit de déterminer le bruit (ou la pression acoustique) dans un champ créé par plusieurs sources il est habituel, et valide, de considérer que les sources sont indépendantes ou non corrélées.

Physiquement cela signifie que leur énergie ou leur puissance sont additives en tout point de réception dans un champ diffus et lointain où l'indépendance est réaliste. De manière générale une source de puissance W_1 et repérée par son niveau de puissance $L_{w1} = 10 \log W_1/W_0$ crée au point de réception M situé à la distance r_1 (champ lointain) un niveau de pression acoustique L_{p1} égal à

$$10 \log\left\{\frac{W_1}{4\pi r r_1^{\,2}} \Big/ \frac{W_0}{4\pi r r_0^{\,2}}\right\} = L_{w1} - 10 \log\{4\pi r_1^{\,2}/1(m^2)\}$$

avec les grandeurs de référence $W_0 = 10^{-12}$ Watt et r_0 = 0,282 m le rayon de la sphère d'aire unité (Beranek 1971, Harris 1979, Josse 1973, Liénard 1978, Migneron 1980). Il en est de même pour une seconde source de puissance W_2 à la distance r_2 de M, et l'on sait bien qu'en ce point le niveau de pression résultant n'est pas égal à la somme des niveaux L_{p1} et L_{p2} .

Ici la règle physique des sources indépendantes est l'additivité des puissances en M, c'est à dire que l'on considère la somme des puissances

$$\left\{\frac{W_1}{4\pi r r_1^{\,2}} / \frac{W_2}{4\pi r r_2^{\,2}}\right\} 4\pi r_0^{\,2} = (10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10})\, W_0 ,$$

et le niveau $L_{ptot} = 10 \log (10^{L_{p1}/10} + 10^{L_{p2}/10})$
qui en résulte alors.

Cette règle s'étend naturellement à un nombre quelconque de sources considérées comme indépendantes. C'est le cas en acoustique routière notamment, par exemple avec des véhicules situés à des abscisses x_k sur une chaussée rectiligne et de puissance W_k , le niveau global est égal à

$$L_{ptot} = 10 \log \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{W_k 4\pi r_0^2}{W_0 4\pi r_k^2} \right\}$$

avec $r_k^2 = d^2 + x_k^2$ en un point récepteur à la distance d de la chaussée. La sommation peut prendre diverses formes selon la disposition des sources, d'autres exemples simples et immédiats de l'additivité des puissances et des énergies acoustiques figurent en Annexe 2.

5.2 Une nouvelle attitude vis-à-vis des décibels

Cela signifie que l'étude des phénomènes en acoustique de l'environnement introduit naturellement des relations additives de la forme (2), et que les mêmes grandeurs physiques obéissent à deux modes distincts de composition ; en l'occurence la composition multiplicative des rapports E_i/E_0 qui est à l'origine des niveaux en décibels, mais aussi la composition additive $E_i + E_j$ très importante en matière d'environnement.

Mais évidemment ces deux règles de composition ne sont pas réductibles l'une à l'autre, et la relation additive est tenue de s'intégrer dans un contexte qui a privilégié le logarithme, ce qui implique des pratiques calculatoires forcément moins commodes, "*the use of the logarithmic scale requires somewhat different arithmetic than we are accustomed to using with linear scales*" (von Gierke and Eldred 1993) (Pour le pH également l'introduction du logarithme entraîne quelques lourdeurs de calculs malgré tout). C'est bien ce qu'éprouvent les acteurs qui s'occupent d'expositions sonores d'une certaine durée, ou de problèmes de multi-expositions de toutes sortes, et qui constatent l'émergence de cette relation additive. Pour cette raison ils peuvent ne pas autant que d'autres en acoustique partager l'intérêt des niveaux, et certains ont été conduits à proposer de faire l'économie des décibels "*Sound exposure without decibels*" titre explicitement Eldred en 1986. Tout cela revient à privilégier la composition additive des énergies reçues, par exemple dans la notion de « sound exposure » dans des procédures réglementaires (Schomer 1996, von Gierke and Eldred 1993), "*Again the key factor is that we sum the sound exposure for individual events*" (Schomer 1996).

Ceci est un point de vue qui renvoie dos à dos les télégraphistes et Fechner quant à l'intérêt des niveaux et à la responsabilité de l'introduction de logarithme, et qui rend la discussion précédente sans objet. Cependant von Gierke et Eldred (1993) écrivent aussi "*This use of logarithmic scale is convenient because* ..." (en substance ils évoquent là la réduction de l'étendue numérique des grandeurs elles-mêmes). Par conséquen, quoique l'on fasse, les deux types de relation additive et multiplicative (dotée de sa traduction logarithmique) sont également signifiants et légitimes, et puisqu'il ne peut y avoir un système de transcription mathématique qui les rendent également commodes, il faut convenir d'une forme d'arbitrage entre les deux.

On sait bien que l'on a proposé le mode de conduite suivant, les caractéristiques des expositions sont uniquement traitées à l'aide de notions additives comme la « sound exposure » SE ou la « day night sound exposure » DNSE qui se limitent à faire les seules sommations avec l'économie des niveaux de grandeur chaque fois que c'est possible, à la suite de quoi tous cumuls additifs faits, on revient en dernier aux notions de « *sound exposure level* » SEL et de « *day night sound level* » DNL avec le niveau de ces grandeurs (**L**) en décibels.

Pour terminer la loi additive est naturellement valable à des constantes près, par exemple $\lambda(E_1/E_0 + E_2/E_0)$ pour tout jeu de paramètre $\{\lambda, E_0\}$, ce qui permet des aménagements avec un choix conventionnel de constantes pour définir une sorte de grandeur unité de l'exposition acoustique. C'est ainsi que si l'on désire qu'une exposition cumulée de référence E_{ref} conduise à un DNL_{ref} de référence, il suffit de retenir un jeu qui vérifie $\lambda E_{ref}/E_0 = 10^{DNL_{ref}/10}$ afin d'obtenir la relation $DNL = 10 \log \lambda E/E_0 = DNL_{ref}$
$+ 10 \log E/E_{ref}$ comme le font en substance von Gierke et Eldred (1993) ; ce sont des aménagements au sein de cet arbitrage qui bénéficient des propriétés du logarithme.

6 Conclusion

Sous le coup de sa découverte Napier nous invitait à "payer un tribut de gloire et de reconnaissance à Dieu", "... *Deoque ... laudem summam et gloriam tribuite*" (cité dans Dupuis 1885) à propos de ces merveilleux logarithmes, "*mirifici logarithmorum canonis descriptio* ..." (dans le titre du premier mémoire, celui de 1614).

Aujourd'hui nous pourrions aussi louer l'application logarithme elle-même à cause de la richesse des propriétés qu'elle recèle. La louer certes, mais dans le même temps apprendre à nous en méfier car elle peut jouer quelques bons tours à sa manière ; la preuve n'en est elle pas donnée avec la définition des décibels qui voit défiler un certain nombre de justifications, des bonnes et des moins bonnes avec leur cortège de confusions.

Parmi les bonnes il y a sans conteste le fait d'être une transformation continue qui permet de passer d'un produit à une somme, et qui s'introduit naturellement dans les disciplines qui ont jugé utile de faire des comparaisons de grandeurs par leur rapport quand on cherche malgré tout une règle finale additive. Il y a aussi la réduction de l'étendue des valeurs numériques après transformation, et plus récemment le fait que si l'on veut se livrer à des traitements statistiques, le changement de variable logarithme est celui qui facilite au mieux les traitements ultérieurs.

A côté de cela la loi de Weber semble être assez bien établie dans un grand champ intensité-fréquence à propos de la sensation auditive. Toutefois cela n'implique en rien nous l'avons vu la validité de la loi que Fechner en a déduit, et c'est là une première méprise ou confusion. Une seconde est de penser que la loi de Fechner elle-même est bien établie alors que ce n'est qu'une réponse correcte à une question non véritablement pertinente, et une troisième consiste à voir l'intervention de la loi de Fechner partout où figure un logarithme en Acoustique, sous prétexte que le loi de Fechner est logarithmique et qu'il y a un volet de physiologie. Qui plus est la loi de Fechner s'avère en pratique supplantée par la loi de Stevens.

On peut ajouter une autre raison d'ordre plus général pour prendre ses distances avec la loi de Fechner. En effet on peut rappeler que les phénomènes étudiés en physiologie ne sont pas aussi simples que cela à bien connaître, ce qui fait que les relations de la Psychophysique n'ont sans doute pas autant le label de relations exactes que peuvent l'avoir les relations que l'on établit en Physique par exemple. Malgré cela la loi (et la formule) de Fechner reste une justification courante pour la genèse logarithmique des niveaux. Et dans le même temps on ne peut manquer d'être dubitatif et surpris car finalement elle présente deux attributs assez stables dans la littérature. D'une part celui d'être assez souvent invoquée comme nous l'avons vu ; mais aussi quand on examine les justifications et citations de près, celui d'être accompagnée par des réserves, comme pour adhérer à une opinion que l'on s'empresse de citer pour ne plus avoir à y revenir.

Pour terminer il n'est jamais facile de prendre à partie une opinion assez bien consensuelle, ni de se lancer dans une reconstitution de faits avec des sources qui sont nécessairement incomplètes. L'auteur souhaite simplement que cette discussion puisse aider à mieux identifier les raisons véritables et défendables de la convention du décibel, les raisons corollaires et convergentes qui sont rendues possibles par le nombre et l'intérêt des propriétés du logarithme, et à situer les autres de manière à rendre à chacune la mesure de sa pertinence dans l'édification de l'acoustique.

7 - Références

Benzécri J.P., 1982, Histoire et préhistoire de l'Analyse des Données, Dunod.

Beranek L.L., 1971, Noise and vibration control, Mac Graw Hill.

Bonnet C., 1986, Manuel pratique de Psychophysique, A. Colin.

Canévet G., 1996, La psychoacoustique, aspects fondamentaux et exemples d'applications, Acoustiques et Techniques n° 5, 7-14.

Didier A., 1993, Acoustique, audiométrie, Encyclopaedia Universalis, corpus 1.

Dupuis J., 1885, Tables de logarithmes à sept décimales, Hachette.

Eldred K.M., 1986, Sound exposures without decibels, Inter-Noise86, 111-116.

Falmagne J.C., 1985, Elements of Psychophysical theory, Clarendon Press, Oxford University Press.

Fleury P., Mathieu J.P., 1955, Physique générale et expérimentale, Tome III, Eyrolles

Ford R.D., 1987, Physical assessment of transportation noise, in Nelson P. editor, Transportation noise reference book, Butterworths.

Galais F., Rumeau G., 1961, Chimie générale, Delagrave.

Galanter E., Messick S., 1961, The relation between category and magnitude scale of loudness, Psychological review, vol 68 n°6, 363-372.

Habault D., 1994, Propagation du son en extérieur, dans Acoustique générale édité par P.J.T. Filippi, les éditions de Physique.

Harris C.M., 1979, Hanbook of noise control, Mac Graw Hill.

Johnson D.R., Saunders E.G., 1968, The evaluation of noise from freely flowing road traffic, J. of Sound and Vibrations, vol 7 n°2, 287-309.

Josse R., 1973, Notions d'acoustique à l'usage des architectes ingénieurs et urbanistes, Eyrolles.

Kryter K., 1987, [Bel entry], Encyclopaedia of Sciences and technology, volume 2, McGraw Hill.

Lefebvre J.P., 1994, Les bases physiques de l'Acoustique, dans Acoustique générale édité par P.J.T. Filippi, les éditions de Physique.

Liénard P., 1978, La famille décibel, Masson.

Luce R.D., Edwards W., 1958, The derivation of subjective scales from just noticeable differences, Psychological review, vol 65 n°4, 222-237.

Luce R.D., Galanter E., 1963, (a) Discrimination, (b) Psychophysical scaling, in Luce, Bush and Galanter, Handbook of mathematical psychology, (a) 193-243, (b) 246-307.

Matras J.J., 1990, Le son, Que sais-je, PUF.

Maurin M., 1994, Sur un nouvel intérêt du logarithme en acoustique statistique, Acustica n° 80 138-146.

Maurin M., 1998, A measurement method for ordered category scales, Sensoral 98, Montpellier Cemagref vol. 2.

Maurin M., 1999, Quelques propos sur la "logique des niveaux", rapport INRETS-LTE 9907.

Migneron J.G., 1980, Acoustique urbaine, Masson.

Penrose R., 1993, L'esprit, l'ordinateur et les lois de la Physique, InterEditions ; translation of the Emperor's new mind, concerning computers, minds and the laws of physics, 1989.

Riéty P., Ottié L., 1986, Mesures en acoustique, Techniques

de l'Ingénieur, volume R6, R 3110.
Roberts F.S., 1979, Measurement theory, Addison-Wesley Cy.
Schomer P.D., 1996, Development of a new ANSI assessment of combined noise environments, Inter-Noise 96, 3265-3270.
[sound intensity - entry], 1992, the new Encyclopaedia Britannica, Micropaedia **11** : 27 : 1b.
Stevens S.S., 1966, A metric for the social concensus, Science, vol 151, 530-541.
Stevens S.S., 1971, Issues in psychophysics, Psychological review, 78 n°5, 426-450.
Verley J.L., 1990, Exponentielle et logarithme, Encyclopædia Universalis, corpus 9.
von Gierke H.E., Eldred K.M., 1993, Effects of noise on people, Noise news international, vol. 1 n° 2, 67-89.

ANNEXE 1: Un avatar technique de la loi de Fechner.

Il s'agit d'une reformulation de la problématique de Fechner qui a été développée près d'un siècle après son premier énoncé par Luce et Edwards en 1958.

L'idée de ces derniers consiste à respecter l'aspect fini des Jnd, à ne plus utiliser la version différentielle comme l'a fait Fechner trop précipitamment semble-t-il (§ 4.1), et donc à écrire que sur le continuum révisé de Fechner u_{Frev} les Jnd Δu_{Frev} se mettent sous la forme d'une différence

$u_{Frev}(x + \Delta_\pi(x)) - u_{Frev}(x)$ en utilisant la fonction de Weber $\Delta_\pi(x)$. Il s'agit encore de résoudre cette équation en recherchant la fonction inconnue $u_{Frev}(x)$.

Cette nouvelle formulation conduit à problème technique très différent dont la solution est sans doute moins familière. L'équation en question est une équation fonctionnelle aux différences dite d'Abel, qui a été résolue par Koenigs en 1884 et 1885 (Luce and Edwards 1958).

On peut simplement retenir que l'équation aux différences de la forme

$$u_{Frev}(x + \Delta_\pi(x)) - u_{Frev}(x) = g(\pi) \qquad (5)$$

avec un second membre qui ne dépend pas de x ne possède pas toujours de solution en u_{Frev} (cela dépend de l'expression de $\Delta_\pi(x)$), et que lorsqu'elle existe la solution ne s'exprime pas sous une forme analytique simple.

Et l'on peut encore vérifier que dans le cas de la fonction de Weber particulière simple et classique $\Delta_\pi(x) = K(\pi)(x+x_0)$ comprenant un seuil éventuel x_0 et une constante K qui peut dépendre de l'indice de discrimination π,

$$u_{Frev}(x) = \frac{g(\pi)}{\ln(1+K(\pi))} \ln(x + x_0)$$

est solution de (5) puisque

$$u_{Frev}(x + \Delta_\pi(x)) = \frac{g(\pi)}{\ln(1+K(\pi))} \ln\{x+K(\pi)(x+x_0) + x_0\}.$$

On constate que le logarithme continue à y figurer en bonne place, et que l'on retrouve la solution de Fechner C lnx lorsque la constante seuil x_0 est nulle, mais cette fois-ci en suivant un mode de résolution qui respecte le caractère fini des Jnd, ou mieux des fonctions de Weber.

ANNEXE 2: D'autres relations additives en acoustique de l'environnement.

Lorsque les véhicules routiers ont la même puissance W et sont régulièrement espacés de la distance a avec les abscisses $x_k = x + k\,a$ on connaît la formule sommatoire élégante au titre de jolie illustration de l'additivité des énergies (Johnson Saunders 1968)

$$\frac{W}{W_0 4\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{d^2+(x+ka)^2} = \frac{W}{W_0 4\pi}\,\frac{\pi\, sh(2\pi d/a)}{ad\,(ch(2\pi d/a)-\cos(2\pi x/a))}$$

cos est le cosinus ordinaire, sh le sinus hyperbolique et ch le cosinus hyperbolique.

L'additivité des puissances se rencontre de facto dans la définition de l'indice de bruit équivalent

$$Leq_{[t1,t2]} = 10 \log \left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(p_t)^2}{p_0}dt\right\}$$

dans laquelle l'intégration rend compte de l'additivité au cours du temps, et non pas dans l'espace comme dans les exemples ci-dessus avec des sources distinctes sur la même durée, (p_t la pression acoustique, de carré intégrable).

Pour illustrer la nature des calculs auxquels les niveaux et l'additivité des puissances conduisent on sait bien que l'on schématise la règle

$$L_{ptot} = 10 \log (10^{Lp1/10} + 10^{Lp2/10})$$

composant deux sources de bruit indépendantes qui créent en un même point les bruits de niveaux respectifs L et L - Δ décibels, (Δ positif sans réduire la généralité) pour le niveau global

$$L_{ptot} = 10 \log (10^{L/10} + 10^{(L-\Delta)/10})$$
$$= L + 10 \log (1 + 10^{-\Delta/10})$$

Le second terme est le fruit de l'addition des puissances en présence de niveaux et des propriétés du logarithme, il décroît en fonction de la différence de niveaux Δet devient pratiquement négligeable au-delà de 6 à 7 décibels; ce développement est classique et on le voit souvent accompagné de graphes, d'abaques ou de tables numériques.

West Caldwell Calibration Laboratories, Inc.
uncompromised calibration

Web Site: www.wccl.com
E-Mail: info@wcci.com

Head Office & Lab.: 1086 Bloomfield Avenue West Caldwell
New Jersey, 07006, U.S.A.
Phone: (973) 882-4900 Fax: (973) 808-9297

Branch Office: 5200 Dixie Road, Suite 118, Mississauga
Ontario, L4W 1E4, Canada
Phone: (905) 624-3919 Fax: (905) 624-3926

A PRIMARY SOURCE LABORATORY

for Calibration and Repair of
Sound, Vibration, and Electronic Test Instrumentation

SPECIALIZING IN:

- ACCELEROMETERS
- MICROPHONES
- SOUND LEVEL METERS
- VIBRATION METERS
- FIELD CALIBRATORS
- AUDIOMETRIC EQUIPMENT
- VIBRATION TEST EQUIPMENT
- FREQUENCY ANALYZERS

Authorized Calibration and Repair Center for:
Rion
Ono-Sokki
Scantek Inc.
Dalimar Instruments Inc.

We service equipment Manufactured by:
ACO Pacific
Brüel & Kjær
Endevco
Fluke
Hewlett-Packard
Larson Davis
Simpson
and others
(Contact for Details)

OUR AUTOMATED FACILITY ASSURES YOU OF:

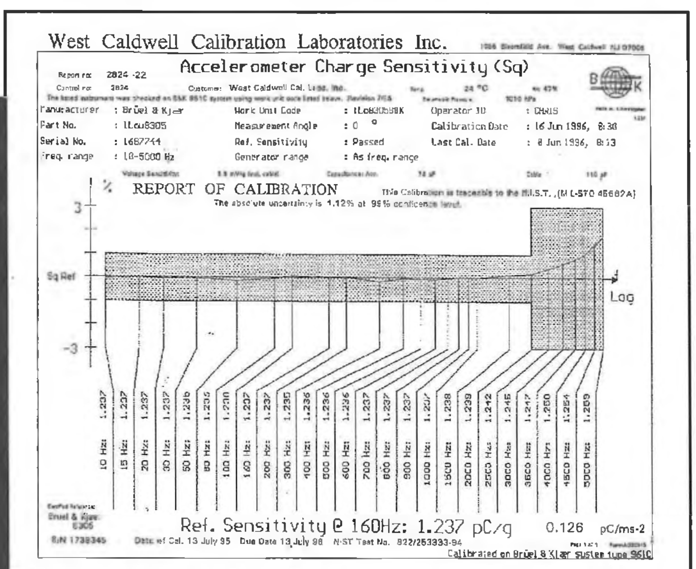
CALIBRATION TRACEABLE TO N.I.S.T.
CERTIFICATION: ISO 9002
ACCREDITATION: ANSI/NCSL Z540-1-1994
ISO/IEC GUIDE 25 (1990)
COMPLIANCE MIL-STD-45662A
ISO 10012-0 1992 (E)

SUPER WORKMENSHIP
COMPLETE TEST DOCUMENTATION
QUICK TURNAROUND TIME:
- TWO WEEK TURNAROUND
- 48 HOUR CALIBRATION SERVICE AVAILABLE FOR ADDITIONAL FEE.

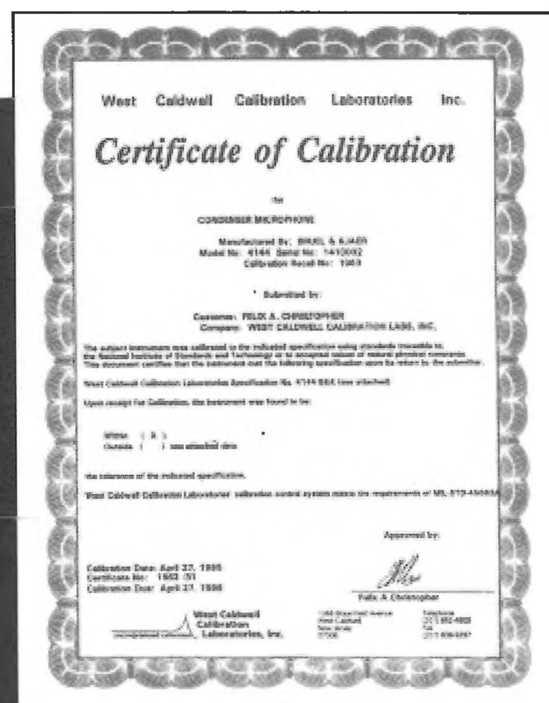
OTHER SERVICES INCLUDE:

- CUSTOM SYSTEM INTEGRATION
- ON-SITE CALIBRATION

SAMPLE OF REPORT & CERTIFICATE:

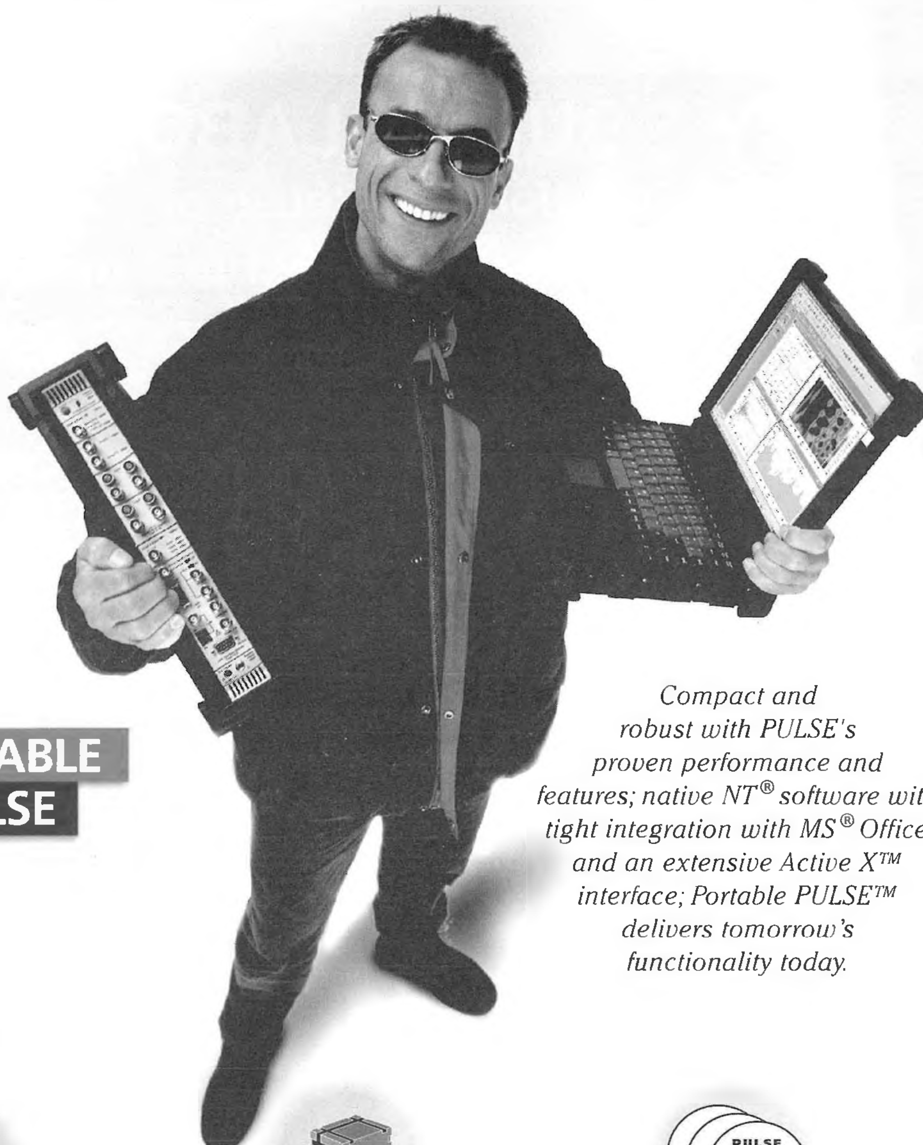

West Caldwell Calibration Laboratories Inc.
Accelerometer Charge Sensitivity (Sq)
REPORT OF CALIBRATION
Ref. Sensitivity @ 160Hz: 1.237 pC/g 0.126 pC/ms-2
Calibrated on Brüel & Kjær system type 9610

Accelerometer calibration performed on the system chosen by the U.S. Air Force [PMEL]


West Caldwell Calibration Laboratories Inc.
Certificate of Calibration

Free yourself!

Brüel & Kjær PULSE - the Multi-analyzer goes portable



PORTABLE PULSE

Compact and robust with PULSE's proven performance and features; native NT® software with tight integration with MS® Office, and an extensive Active X™ interface; Portable PULSE™ delivers tomorrow's functionality today.

Capabilities

- *4 input and 2 generator output channels (2-6 channel configurations to follow)*
- *DC to 25.6 kHz on input channels*
- *Gap free recording of time data to PC disk (TTD)*

Analysis types supplied as standard

- *Octave analysis (CPB): 1/1, 1/3, 1/12, 1/24-octaves along with overall levels*
- *FFT: Up to 6400 lines of both baseband and zoom analysis*
- *Overall levels: 7 different broadband quantities*

Battery operation

Typical 3 hours battery life with continuous operation on 4 channels, replaceable without interrupting the measurement.

PULSE features

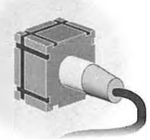
- *Drag and drop reporting in Word*
- *Tight integration with Excel*
- *Data export in all common formats*

PULSE applications

- *Sound Intensity*
- *Noise Source Identification*
- *Sound Quality*
- *PULSE Bridge to MATLAB™*
- *PULSE Bridge to ME'scope™*
- *Vold-Kalman Order Tracking Filter*
- *Modal Test Consultant™*
- *Time Capture*

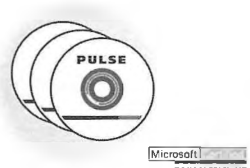
Your PC is your Analyzer

FFT, 1/n-octave and overall level analyzers can run on your PC simultaneously (**multi-analysis**). How? The unique **Analysis Engine** software delivers scalable real-time signal processing performance from your PC processor without additional DSP hardware (Minimum PC requirements: 300 MHz Pentium II, 128MB RAM, 4GB Hard disk).



Intelligent Front-end

Portable PULSE's front-end supports **transducer ID** (TEDS) according to IEEE P1451.4, with which the system automatically detects and identifies connected transducers. No more setting up channel sensitivities or entering transducer type into the measurement set-up - it's all done automatically! You just **Plug'n'Play!**



Part of the PULSE family

Open, modular and scalable, the Brüel & Kjær PULSE family is your sound and vibration measurement platform of the future. Start anywhere and add applications, channels and processing resources as your needs grow.
And all this comes at a price that will pleasantly surprise you.

HEADQUARTERS: DK-2850 Nærum · Denmark · Telephone: +4545800500 · Fax: +4545801405 · http://www.bk.dk · e-mail: info@bk.dk
USA: 2815 Colonnades Court · Norcross, GA 30071 · Toll free: (888) 788-1138 · http://www.BKhome.com · e-mail: BKinfo@SpectrisTech.com
CANADA: 90 ch. Leacock Drive • Pointe-Claire, Québec H9R 1H1 • Telephone: (514) 694-8522

Australia (02)9450-2066 · Austria 0043-1-8657400 · Brazil (011)5182-8166 · Canada (514)695-8225 · China (86)1068029906 · Czech Republic 02-67021100
Finland (0)9-755 950 · France (01)69906900 · Germany 06103/908-5 6 · Hong Kong 25487486 · Hungary (1)2158305 · Ireland (01)4504922
Italy (02)57604141 · Japan 03-3779-8671 · Republic of Korea (02)3473-0605 · Netherlands (0)318 559290 · Norway 66771155 · Poland (22)8409392
Portugal (1)4711453 · Singapore (65) 377-4512 · Slovak Republic 421754430701 · Spain (91)3681000 · Sweden (08)4498600 · Switzerland 01/9436070
Taiwan (02)7139303 · United Kingdom (0181)954-2366
Local representatives and service organizations worldwide

Brüel & Kjær